3.1 INTRODUCCION:

En cursos previos se ha visto que algunas ecuaciones polinómicas- esto es, ecuaciones de la forma:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

-no tienen soluciones en R. El ejemplo más sencillo es el de la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Para dar una sencilla salida a esta situación, los matemáticos inventaron el "número i", llamado "unidad imaginaria", el cual está caracterizado por la relación:

$$i^2 = -1 \qquad (2)$$

Si se acepta, por ahora, la introducción de este nuevo número (*), se puede dar solución a la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, en el caso que su discriminante $\Delta b^2 - 4ac$ sea negativo. En efecto, la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

válida para el caso en que $\Delta \geq 0$, se interpreta ahora como

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(4ac - b^2)(-1)}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\sqrt{-1}}{2a},$$

esto es: $\dfrac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\, i}{2a}$,

al despejar i de (2) como "$i = \sqrt{-1}$".

(*) El lector recordará que en Z no toda ecuación de primer grado, ax+b=0, tiene solución. Esta "incompletitud" de Z conduce a la introducción de los números racionales.

Resulta, entonces, que para Δ <0 las soluciones son de la forma:

$$x = p + q\,i \qquad p, q \in R$$

Un talnúmero se llama un "número complejo"; p es su "parte real" y q su "parte imaginaria". Conviniendo en que un número complejo de la forma a $+0\cdot i$ corresponde al número real a, tenemos que R es un subconjunto de los complejos. Si se define la igualdad en C -conjunto de los números complejos- mediante la igualdad de las partes reales e imaginarias:

$$z_1 = a_1 + b_1 i; \qquad z_2 = a_2 + b_2 i$$

son iguales ssi $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$

y se extienden a C las reglas del álgebra en R, se obtienen resultados tales como

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \\ z_1 \cdot z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)i, \quad etc \end{aligned} \tag{3}$$

Las consecuencias de todo lo anterior son las siguientes:

a) C, con la suma y producto (3), tiene la estructura algebraica de un campo.
b) Toda ecuación polinómica de grado n tiene exactamente n raíces en C.

Lo primero significa que C tiene la misma álgebra que R, y su demostración es simple. Lo segundo es un resultado cuya demostración está muy lejos de nuestro alcance; usualmente se trata de los cursos de "cálculo de variable compleja".

En el próximo párrafo los números complejos son introducidos de una manera diferente y usando conceptos conocidos (el misterioso número i revela su secreto). Antes de pasar a ello conviene aclarar que la introducción de C ha expandido enormemente el campo de aplicaciones de la matemática, no setrata sólo de una forma de dar soluciones a determinado tipo de ecuaciones.

Definamos C como el conjunto de todos los pares ordenados z=(x, y) de número reales; esto es: C = R×R.

DEFINICION 1: Si z = (x, y)

(1) Re z:= x es la "parte real" de z.
(2) Im z:= y es la "parte imaginaria" de z.

DEFINICION 2: Si $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$, entonces

(1) $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$ (igualdad)
(2) $z_1 + z_2 := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ (adición)
(3) $z_1 \cdot z_2 := (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$ (multiplicación)

La igualdad (ralación) y la adición (operación), nos son familiares(vectores); en cambio la multiplicación se nos muestra extraña, pero esto es sólo aparente, pues coincide con lo expuesto en el párrafo anterior.

Pongamos 0:=(0, 0) (cero complejo) y 1:=(1, 0) (uno complejo), entonces

TEOREMA 1: El conjunto de los números complejos, con la relación de igualdad y las operaciones de adición y multiplicación, tiene una estructura algebraica de campo. Esto es

(1) $\forall\ z_1, z_2, z_3 \in$ C: $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$
(2) $\forall\ z_1, z_2 \in$ C: $z_1+z_2 = z_2+z_1$
(3) $\forall$ z $\in$ C: z+0=z
(4) $\forall$ z $\in$ C $\exists!$ -z$\in$C: z+(-z)=0
(5) $\forall\ z_1, z_2, z_3 \in$ C: $z_1(z_2\ z_3)=(z_1\ z_2)\ z_3$
(6) $\forall\ z_1, z_2 \in$ C: $z_1\ z_2 = z_2\ z_1$
(7) $\forall$ z $\in$ C: z·1=z
(8) $\forall$ z $\in$ C:, z $\neq 0$, $\exists!$ $z^{-1}\in$C: z z^{-1}=1
(9) $\forall\ z_1,\ z_2,\ z_3 \in$ C: $z_1(z_2 + z_3)= z_1\ z_2+z_1\ z_3$

En adición , si z = (x, y), entonces el "inverso aditivo" de z resulta ser

-z =(-x, -y), su " inverso multiplicativo" es

$$z^{-1}= \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right), \qquad z \neq 0$$

consideremos ahora el conjunto R de todos los complejos de la forma:
z = (x, 0).

Si $z_1=(x_1,0)$, $z_2=(x_2, 0)$, la aplicación de Def.2 nos da:

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$
$z_1 + z_2 = (x_1+x_2, 0)$
$z_1\ z_2=(x_1\ x_2, 0)$
$-z_1=(-x_1, 0)$
$-z_2=(x_1^{-1}, 0), \quad z_1 \neq 0.$

Estos resultados sol sumarizamos diciendo que *R* es un subconjunto de C "cerrado" para la adición y multiplicación; más aún, es un "subcampo" de C, pues, como fácilmente se desprende de lo anterior, posee las propiedades enunciadas en el Teor.1.

Teniendo en mente esta idea, como z=(x, 0) tiene su parte imaginaria nula, podemos "identificar" el complejo z con el número real x; es decir, identificamos *R* con R. Formalmente esto se realiza definiendo la función

φ: R $\rightarrow$ C, $\quad \varphi$(x):=(x, 0)

La cual es uno a uno, tiene recorrido iguala R y satisface las relaciones

$\forall\ x_1,\ x_2 \in$ R: $\varphi(x_1,\ x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$
$\varphi(x_1\ x_2) = \varphi(x_1)\,\varphi(x_2)$

φ es un “isomorfismo” entre los campos R y *R*.

Entendiendo así las cosas, todo complejo de la forma (x, 0) lo reemplazamos por el realx. En particular, los complejos 0 =(0, 0) y 1=(1, 0) los denotaremos por 0 y 1.

Consideremos ahora el complejo (0,1) de la Def.2:

(0, 1)(0, 1) =(0-1, 0+0)=(-1, 0)
= -1 (según la convención)

(y, 0)(0, 1) = (0-0, y+0) = (0, y)

De esto último se sigue que

(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x+0) + (y, 0)(0, 1)
= x + y (0, 1)

DEFINICION 3:

(1) i :=(0, 1) es la “unidad imaginaria”
(2) x+yi es la “forma binomia” del complejo z= (x, y).

Hemos logrado así conciliar la definición informal de los números complejos, vista en la introducción, con la definición dada en este párrafo. Se observará que el complejo i es tal que $i^2 := i{\cdot}i = -1$.

En vista del Teor 1. y como ya se ha destacado anteriormente, el álgebra de los números complejos es completamente análoga a la de los números reales. Por ejemplo, si $z_1 = x_1 + y_1 i,$ entonces la DIFERENCIA entre z_1 y z_2 es el número complejo $z_1 - z_2$, definido por:

$z_1 - z_2 :=\ z_1 + (-\,z_2) = x_1 - x_2 + (\,y_1 - y_2\,)$ (como par ordenado)

También, si $z_2 \neq 0$, entonces el CUOCIENTE entre z_1 y z_2 es el número complejo siguiente

$$\frac{z_1}{z_2} := z_1 \cdot z_2^{-1}.$$

Se tienen las mismas reglas de simplificación, análogas definiciones de potenciación, radiación (de éstas nos ocuparemos con más detalles en el párrafo siguiente), etc.

Como par ordenado, todo número complejo puede ser representado geométricamente: z=(x, y) es un punto en el plano.

Cuando el plano es usado para estos fines, recibe el apelativo de PLANO COMPLEJO. El eje x consiste ahora de todos los complejos de la forma (x, 0), razón por la que de le llama EJE REAL. El otro, formado por los complejos de la forma (0, y) es el EJE IMAGINARIO.

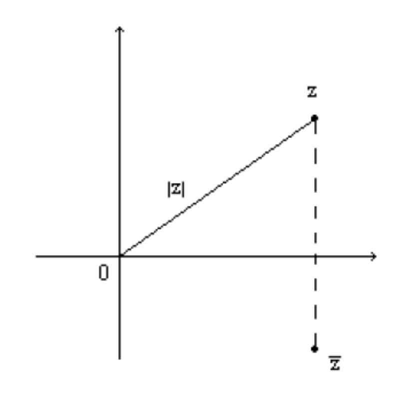
DEFINICION 4: Si z = x + y i , entonces

(1) el "onjunto" de z es el complejo

$$\overline{z} := x - yi$$

(2) el "módulo" de z es el número real

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$



En la figura se han representado geométricamente z, $\overline{z}$, también denotado por z* en algunos textos, se obtiene de z mediante una reflexión de éste enel eje real; $|z|$ también llamado "valor absoluto" de z, representa la distancia de z a 0; si z se piensa como el vector de 0 al punto (x, y), $|z|$ es su longitud.

DEFINICION 5: La "distancia" entre z_1 y z_2 es

$$d(z_1, z_2) := |\, z_1 - z_2 \,|.$$

Respaldándose en el capítulo precedente, vemos que la distancia entre dos complejos mide la longitud del trazo que une sus representaciones gráficas.

TEOREMA 2: Sean z, w $\in$ C, entonces

(1) $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in R$

(2) $\bar{\bar{z}} = z$

(3) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z$, $z - \bar{z} = 2i\ \mathrm{Im}\, z$

(4) $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$

(5) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$

(6) $\overline{z / w} = \bar{z} / \bar{w}$, $w \neq 0$

(7) $z\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$

(8) $|zw| = |z|\,|w|$

(9) $|z/w| = |z| / |w|$, $w \neq 0$

(10) $|z + w| \leq |z| + |w|$

(11) $|z - w| \geq \big|\, |z| - |w| \,\big|$.